Proposition : $f \in \mathcal{L}(E, F)$ est injective si et seulement si les colonnes d'une matrice représentative de f dans des bases quelconques forment une famille libre.

Démonstration : Notons $m = \dim(E)$, $n = \dim(F)$ et $A = \begin{pmatrix} | & | & & | \\ C_1 & C_2 & \cdots & C_m \\ | & | & & | \end{pmatrix}$ la matrice représentative de f dans des bases quelconques de E et de F. Alors :

$$\begin{aligned}
f \text{ est injective} &\Longleftrightarrow \mathrm{Ker}(f) = \{0\} \\
&\Longleftrightarrow [\forall x \in E,\ f(x) = 0 \Longrightarrow x = 0] \\
&\Longleftrightarrow [\forall X \in \mathcal{M}_{m,1}(\mathbb{R}),\ AX = 0 \Longrightarrow X = 0] \\
&\Longleftrightarrow \left[\forall (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m,\ A \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_m \end{pmatrix} = 0 \Longrightarrow (x_1, ..., x_m) = (0, ..., 0)\right] \\
&\Longleftrightarrow \left[\forall (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m,\ x_1 C_1 + \cdots + x_m C_m = 0 \Longrightarrow (x_1, ..., x_m) = (0, ..., 0)\right] \\
&\Longleftrightarrow (C_1, ..., C_m) \text{ est libre}
\end{aligned}$$